Inférence Grammaticale

Fabien Torre

Université de Lille

Mercredi 4 et 18 novembre 2009

Séquences et alphabet

Notations

- un alphabet Σ, ensemble fini quelconque ;
- un mot w, une séquence finie de lettres de Σ ;
- mots possibles sur Σ : Σ^* ;
- on note ϵ le mot vide.

Par exemple

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $+$: ϵ, *aaa*, *b*, *abbaa*, *aaaaaa* ;
- $-$: *bba*, *aab*, *bbaababa*.

Objectifs : identifier un langage cible, apprendre à classer de nouveaux mots.

Obtention des exemples et évaluation

Protocoles possibles

- expérimental ;
- PAC [Valiant, 1984] ;
- à la limite [Gold, 1967] le plus souvent.

Apprentissage à la limite

- avec des positifs et des négatifs : *avec informateur* ;
- ou des exemples positifs seuls : *à partir de textes* ;
- tous les mots du langage cible sont progressivement fournis : *présentation positive* ;
- après chaque exemple, l'apprenant propose un classifieur ;
- il finit par proposer la cible et ne doit plus changer d'avis.

Des échantillons particuliers

Définition : échantillon caractéristique

Un échantillon S^c est dit *caractéristique* pour une cible $c \in \mathcal{H}$ et un apprenant L ssi il est le plus petit échantillon vérifiant :

$$\forall S : S^c \subseteq S \Rightarrow L(S) = c$$

Démarche

1. choisir $\mathcal{H}$;
2. proposer un algorithme L qui fournit des hypothèses de $\mathcal{H}$;
3. définir un échantillon caractéristique pour $c \in \mathcal{H}$ et L ;
4. prouver l'apprenabilité à la limite de $\mathcal{H}$.

... passons en revue les $\mathcal{H}$ pour les mots.

Hypothèses en inférence grammaticale

Apprendre une grammaire, un automate ou une expression régulière.

Définition : grammaire formelle

Une grammaire est donnée par un quintuplet (V, Σ, P, S) :

- V les variables, les non-terminaux ;
- Σ l'alphabet, les symboles terminaux ;
- P règles de production $\alpha \to \beta$ avec $\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$ et $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$;
- $S \in V$, symbole de départ.

Au tableau : exemple /production / reconnaissance (subsomption).

Différentes familles selon la forme des règles...

Hiérarchie de Chomsky

- Type 0 : les grammaires sans contrainte de forme ;
- type 1 : les grammaires contextuelles ;
- type 2 : les grammaires hors contextes ;
- les grammaires linéaires ;
- type 3 : les grammaires rationnelles.
- type 4 : les grammaires à choix finis.

Autant de langages d'hypothèses $\mathcal{H}$ à disposition... et même plus !

Grammaires de type 0

- Sans contrainte sur leur forme des règles de production $\alpha \to \beta$;
- puissance des machines de Turing ;
- le test de subsomption est indécidable.

Grammaires contextuelles (type 1)

- Pour les règles de production $\alpha \to \beta$, on impose que $|\alpha| \leq |\beta|$;
- exemples de langages contextuels :
  - $a^n b^n c^n$;
  - ww ;
- le test de subsomption est de complexité exponentielle.

Grammaires hors contextes (type 2)

- Pour les règles de production $\alpha \to \beta$, on impose que $\alpha \in V$;
- on les appelle aussi *algébriques* ;
- elles sont représentables par des *automates à pile* ;
- exemples de langages *context-free* :
  - les langages de Dyck ;
  - $a^n b^n$;
  - le langage des palindromes $\{w | w = w^R\}$;
- le test de subsomption est cubique dans la taille du mot.

Grammaires linéaires (entre les types 2 et 3)

- Pour les règles de production $\alpha \to \beta$, on impose que
  - $\alpha \in V$ et
  - soit $\beta \in \Sigma$;
  - soit $\beta \in \Sigma \times V \times \Sigma$.

Grammaires rationnelles (type 3)

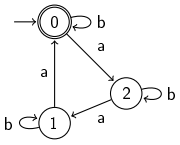
- Les grammaires linéaires droites (équivalentes aux gauches).
  Pour les règles de production $\alpha \to \beta$, on impose que
  - $\alpha \in V$ et
  - soit $\beta \in \Sigma$;
  - soit $\beta \in \Sigma \times V$.
- *langages réguliers* ou *grammaires rationnelles*.
- on peut les représenter par des *automates finis déterministes* ou par des *expressions régulières*.
- le test de subsomption en $|w|.|A|^2$, $|w|$ la longueur du mot w, $|A|$ le nombre d'états de l'automate A.

Les automates finis déterministes (AFD)

Définition : AFD

Un AFD est donné par $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- Q l'ensemble des états ; $Q = \{0, 1, 2\}$;
- Σ l'alphabet ; $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ la fonction de transition ;
  $\delta(0, a) = 2$, $\delta(0, b) = 0$, $\delta(1, a) = 0$,
  $\delta(1, b) = 1$, $\delta(2, a) = 1$, $\delta(2, b) = 2$;
- $q_0 \in Q$ l'état initial ; $q_0 = 0$;
- $F \subseteq Q$ les états finaux. $F = \{0\}$.



Caractéristiques et familles d'automates

- Finis,
- minimaux,
- ambigus ou pas,
- déterministes ou non (équivalents),
- déterministes dans les deux sens (0-réversibles),
- k-TSS,
- k-réversibles,
- AFER, etc.

Vraiment beaucoup de $\mathcal{H}$ candidats !

Les expressions régulières

Définition : expression régulière

Construite à l'aide d'un alphabet Σ et des opérateurs :

- . : concaténation ;
- | : disjonction ;
- * : 0 ou plus ;
- $^+$: 1 ou plus ;
- ? : 0 ou 1.

- Exemple : $(a|b)^+.b$;
- À nouveau, plusieurs familles d'expressions régulières : CHARE et SORE, single-loop, etc.

SOREs et CHAREs [Bex et al., 2006]

Définition : Single occurrence regular expressions (SOREs)

Expressions utilisant chaque lettre de Σ au plus une fois.

Définition : *Chain regular expressions* (CHAREs)

Les SOREs qui s'expriment comme une séquence $f_1.f_2 \dots f_n$ où chaque facteur f_i est (avec $k > 0$ et $a_i \in \Sigma$) :

- soit $(a_1|a_2 \dots |a_k)$,
- soit $(a_1|a_2 \dots |a_k)?$,
- soit $(a_1|a_2 \dots |a_k)^+$,
- soit $(a_1|a_2 \dots |a_k)^*$.

Modélisations raisonnables des DTD !

Des hyperplans pour séparer les mots [Clark et al., 2006]

Hyperplans

- comptages proches de l'attributs-valeurs ;
- le langage $L = \{a^n b^n | n > 0\}$ peut être représenté par l'hyperplan : $w \ in L \Leftrightarrow (|w|_a = |w|_b) \wedge (|w|_{ba} = 0)$.

Boules de mots [Tantini, 2009] (1)

Boules : définitions

- trois opérations d'édition de coût unitaire :
  - insertion : $aab \to aa\underline{b}b$
  - suppression : $aa\underline{b} \to ab$
  - substitution : $aa\underline{b} \to ab\underline{b}$
- distance d'édition : $d(w_1, w_2)$ est le nombre minimal d'opérations qui permettent de passer de w_1 à w_2 ;
- un langage est donné par un mot-centre et un rayon : $B_2(bab)$.

Boules de mots [Tantini, 2009] (2)

Attention, beaucoup de pièges...

- les boules de mots ne sont pas homogènes (la moitié des mots de la boule sont à distance maximale du centre) ;
- une boule de mots peut être contenue dans une autre de rayon plus petit : $B_5(ab) \subset B_4(abab)$;
- deux boules de mots de même rayon et de centres de même longueur peuvent dénoter des langages de tailles différentes : $|B_2(aaaabbbb)| \neq |B_2(abababab)|$;
- les boules de mots ne sont pas convexes : $bbbaaa \notin B_4(aabb)$ alors qu'il appartient au segment entre $abbbaaa$ et $bbaaaa$, tous deux dans $B_4(aabb)$;
- représentations multiples d'un langage lorsque $|\Sigma| = 1$: $B_4(\epsilon) = B_3(a) = B_2(aa)$.

Apprendre par positifs seuls

Objectifs

- On veut apprendre des langages réguliers ;
- à partir de positifs seuls ;
- en prouvant un apprentissage à la limite.

Impossible pour la classe entière des langages réguliers...

Plan : apprentissage de sous-classes de réguliers

- un algorithme pour les expressions régulières « simple loop » ;
- un algorithme pour les expressions régulières CHAREs ;
- un algorithme pour les automates k-TSS ;
- un algorithme pour les automates 0-réversibles ;
- un algorithme pour les boules de mots.

[Fernau, 2005] : regroupements et alignement

1. Échantillon : $S = \{ababb*, aabb*, ababa*, abc*\}$
2. regroupements :

$$(a)(b)(a)(bb), (aa)(bb), (a)(b)(a)(b)(a), (a)(b)(c)$$

3. alignement :

$$\begin{array}{cccc} (a) & (b) & (a) & (bb) \\ (aa) & (bb) & & \\ (a) & (b) & (a) & (b) \quad (a) \\ (a) & (b) & (c) & \end{array}$$

[Fernau, 2005] : alignement et généralisation

3. alignement :

$$\begin{array}{cccc} (a) & (b) & (a) & (bb) \\ (aa) & (bb) & & \\ (a) & (b) & (a) & (b) \quad (a) \\ (a) & (b) & (c) & \end{array}$$

4. généralisation (pas tout à fait une généralisation par colonne, attention) :

$$\begin{array}{cccc} a^+b^+(a & & & |\epsilon|c) \\ a^+b^+(a & b^+ & & |\epsilon|c) \\ a^+b^+(a & b^+ & (\epsilon|a) & |\epsilon|c) \end{array}$$

5. résultat $a^+.b^+.(a.b^+.(\epsilon|a)|\epsilon|c)$.

Un biais ?

[Fernau, 2005] : biais

Hypothèse de l'alignement à gauche !
On aurait pu prendre :

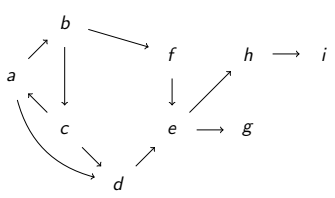
$$\begin{array}{cccc} (a) & (b) & (a) & (bb) \\ & & (aa) & (bb) \\ (a) & (b) & (a) & (b) \quad (a) \\ & & (a) & (b) \quad (c) \end{array}$$

Quelle est alors l'expression apprise ?

Des liens avec la bio-informatique ?

Algorithme CRX pour les CHAREs [Bex et al., 2006]

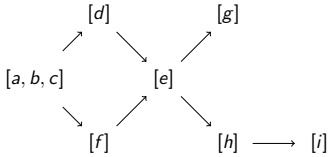
1. Échantillon : $S = \{abccde*, cccad*, bfegg*, bfehi*\}$
2. ordre sur Σ induit par S :



3. classes d'équivalences

Algorithme CRX (2)

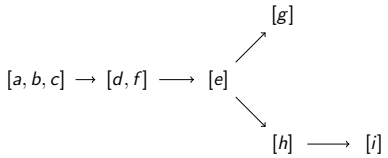
3. classes d'équivalences :



4. fusionner les classes qui ont mêmes prédécesseurs et mêmes successeurs

Algorithme CRX (3)

4. fusionner les classes si mêmes prédécesseurs et mêmes successeurs :



5. par observation de l'échantillon $\{abccde, cccad, bfegg, bfehi\}$, construire l'expression régulière :

$$(a|b|c)^+.(d|f).e?.g^*.h?.i?$$

Apprentissage de DTD avec CRX

Principes

- à partir de documents XML ;
- pour chaque nœud de chaque document, constuire la séquence des fils ;
- pour chaque élément, rassembler les séquences de fils observées ;
- pour chacun de ces échantillons, lancer CRX.

Voir exemples d'apprentissage sur un corpus de pages xhtml.

Langages k-TSS [García and Vidal, 1990]

Définition : langage k testable au sens strict ($k > 1$)

Un langage k-TSS, k étant fixé, est défini par :

- I les segments initiaux autorisés u ($|u| = k - 1$) ;
- F les segments finaux autorisés v ($|v| = k - 1$) ;
- T les segments interdits, tous de taille égale à k ;
- W les mots w du langage tels que $|w| < k - 1$) ;

Formellement :

$$L(\Sigma, I, F, T, W) = W \cup (I\Sigma^* \cap \Sigma^* F) \setminus \Sigma^* T \Sigma^*$$

... les mots w du langage tels que $|w| = k - 1$ sont dans I et F.

... voir aussi les *langages locaux* (2-TSS) et les *n-gram*.

Algorithme k-TSSI [García and Vidal, 1990] I

Clef : chaque état est identifié par une séquence de taille strictement inférieure à k.

Entrées : S un échantillon de mots positifs
Sortie : $h = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate k-TSS couvrant S

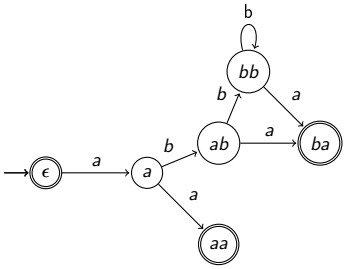
1: créer l'état $q_0 = \epsilon$
2: $Q = \{q_0\}$
3: $\delta = \emptyset$
4: $F = \emptyset$
5: **for all** $w \in S$ **do**
6: $\quad q = q_0$
7: $\quad$ **for** $i = 1$ to $|w|$ **do**
8: $\quad\quad v = q.w_i$

Algorithme k-TSSI [García and Vidal, 1990] II

9: $\quad\quad$ **if** $(|v| > k - 1)$ **then**
10: $\quad\quad\quad v = v_{2,\ldots,|v|}$
11: $\quad\quad$ **end if**
12: $\quad\quad nq = v$
13: $\quad\quad$ ajouter nq à Q
14: $\quad\quad$ ajouter (q, w_i, nq) à δ
15: $\quad\quad$ **if** $(i = |w|)$ **then**
16: $\quad\quad\quad$ ajouter nq à F
17: $\quad\quad$ **end if**
18: $\quad\quad q = nq$
19: $\quad$ **end for**
20: **end for**
21: **return** $h' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Algorithme k-TSSI : une exécution

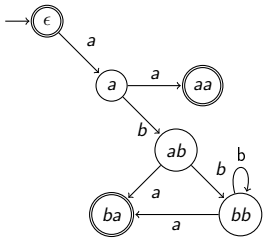
1. Échantillon $S = \{\epsilon*, aa*, aba*, abba*, abbba*\}$ et $k = 3$;
2. inférence de l'automate :



... comment revenir à (I, F, T, W) ?

Algorithme k-TSSI : résultat final

$S = \{\epsilon, aa, aba, abba, abbba\}$ et $k = 3$.



$$\begin{array}{rcl} \Sigma & = & \{a, b\} \\ W & = & \{\epsilon\} \\ I & = & \{aa, ab\} \\ F & = & \{aa, ba\} \\ \overline{T} & = & \{aba, abb, bba, bbb\} \\ T & = & \{aaa, aab, baa, bab\} \end{array}$$

Automates 0-réversible

Définition : 0-réversible

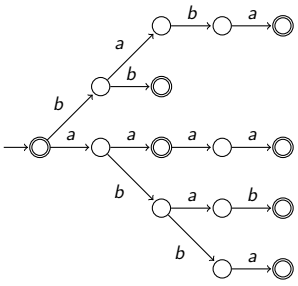
Un automate A est 0-réversible s'il est déterministe dans les deux sens : A est déterministe et son miroir A^R l'est aussi.

L'algorithme ZR de [Angluin, 1982] débute par la construction du PTA de l'échantillon.

- automate en forme d'arbre, sans boucle ;
- reconnaît strictement l'échantillon, pas un mot de plus ;
- il faudra le généraliser.

PTA : Prefix Tree Automaton

$S = \{\epsilon*, aa*, bb*, aaaa*, abab*, abba*, baba*\}$



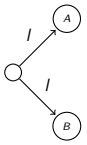
Algorithme ZR [Angluin, 1982]

Entrées : S un échantillon de mots positifs
Sortie : h un automate 0-réversible couvrant les mots de S

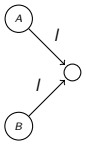
1: $h = \mathrm{PTA}(S)$
2: fusionner les états A et B dans les cas suivants ($l \in \Sigma$) :

deux finaux

non déterminisme

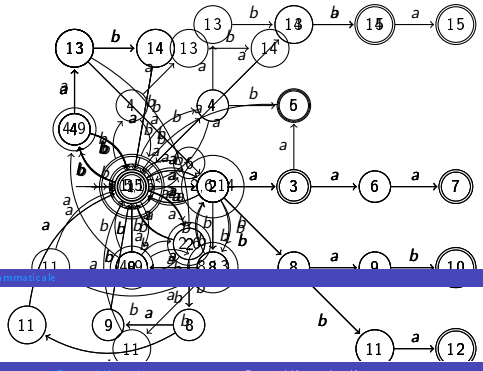


non réversible



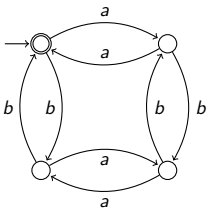
3: **return** h

ZR : une exécution (fusion de 1 et 5) (fusion de 1 et 15) (fusion de 1 et 7, 10, 12) (fusion de 1 et 3) (fusion de 2 et 6) (fusion de 2 et 14) (fusion de 2 et 11) (fusion de 4 et 9) (fusion de 8 et 13)



ZR : une exécution (bilan)

$S = \{\epsilon, aa, bb, aaaa, abab, abba, baba\}$



Esquisse de la preuve d'apprenabilité des 0-réversibles

1. Montrer que quel que soit le langage cible L, il existe un échantillon S^c tel que L est le plus petit langage 0-réversible contenant S^c.
2. Montrer qu'à partir d'un échantillon S, l'algorithme ZR fournit un automate reconnaissant le plus petit langage 0-réversible qui contient S.
3. Montrer que la présentation des exemples va finir par inclure S^c.
4. Conclure : à partir d'une certaine étape de l'apprentissage S contient S^c (3), le plus petit langage 0 réversible qui contient S est donc la cible L (1) et ZR va fournir un automate qui reconnait exactement L (2).

Proposition d'échantillon pour les 0-réversibles

Pour chaque état q de la cible A

On place $u.v$ dans l'échantillon avec u et v définis comme les plus petits mots tels que u conduit de q_0 à q et que v fait passer de q à un état final de A.

Pour toute transition de A entre q et q' par l

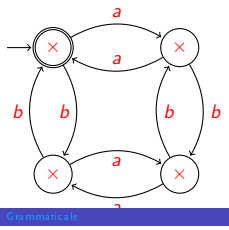
On place $u.l.v$ dans l'échantillon avec u et v définis comme les plus petits mots tels que u conduit de q_0 à q et que v fait passer de q' à un état final de A.

Taille de cet échantillon en fonction de $|A|$?

... notion proche de la ‣ complétude structurelle

Échantillon pour les 0-réversibles : un exemple

Pour chaque état q de la cible A, on place $u.v$ dans l'échantillon avec u et v définis comme les plus petits mots tels que u conduit de q_0 à q et que v fait passer de q à un état final de A.
Pour toute transition de A entre q et q' par l, on place $u.l.v$ dans l'échantillon avec u et v définis comme les plus petits mots tels que u conduit de q_0 à q et que v fait passer de q' à un état final de A.



$$\begin{aligned} \epsilon.\epsilon &= \epsilon \\ a.a &= aa \\ b.b &= bb \\ ab.ab &= abab \\ ab.b.a &= abba \\ b.a.ba &= baba \end{aligned}$$

aaaa ne servait pas ? À vous de vérifier en appliquant ZR !

Preuve pour l'échantillon construit

Montrer que quel que soit le langage cible L, l'échantillon S^c de L que l'on vient de définir est tel que L est le plus petit langage 0-réversible contenant S^c.

Preuve de minimalité de ZR

Montrer qu'à partir d'un échantillon S, l'algorithme ZR fournit un automate reconnaissant le plus petit langage 0-réversible qui contient S.

Apprenabilité des 0-réversibles : conclusion

Montrer que la présentation des exemples va finir par inclure S^c.

Conclure : à partir d'une certaine étape de l'apprentissage S contient S^c (3), le plus petit langage 0 réversible qui contient S est donc la cible L (1) et ZR va fournir un automate qui reconnait exactement L (2).

S^c un échantillon caractéristique pour un langage L 0-réversibles et l'algorithme ZR.

Les 0-réversibles sont apprenables à la limite par positifs seuls.

Apprendre à la limite les boules de mots [Tantini, 2009]

Observation

Pour toute boule $B_r(o)$ définie sur $\Sigma = \{a, b\}$, les mots $a^r o$ et $b^r o$ appartiennent à la boule.

Algorithme

À l'étape t,

1. on cherche dans les t mots reçus les deux plus longs mots de la forme $a^n v$ et $b^n v$;
2. on prédit $B_n(v)$.

Pour poursuivre

1. Est-ce que les algorithmes vus sont *minimaux* ? Autrement dit, est-ce que chacun propose le plus petit langage de sa classe compatible avec l'échantillon ?
2. Pour chaque classe de langages étudiée, quelle est sa dimension de Vapnik-Chervonenkis ?

RPNI [Oncina and García, 1992] : motivations

- Les langages réguliers ne sont pas apprenables à la limite par positifs seuls, des sous-classes oui (k-TSS, k-réversibles, etc.).
- On vise maintenant toutes la classes des AFD mais à partir d'exemples et de contre-exemples, pour un langage cible on va en particulier chercher son *automate canonique*.

Définition : automate canonique

Pour un langage L, l'*automate canonique* ou l'*automate déterministe minimal* est l'automate déterministe le plus petit en nombre d'états qui reconnaît L.

Intuition de RPNI

On commence par calculer le PTA des mots positifs, si l'échantillon est *complet structurellement* il suffit de bien fusionner les états... les négatifs vont nous aider à contrôler les fusions.

Complétude structurelle et RPNI

Définition : complétude structurelle

Un échantillon S de mots positifs est dit *structurellement complet* vis-à-vis d'un automate cible A ssi :

- toute transition de A est utilisée dans la reconnaissance d'au moins un mot de S ;
- tout état final de A est activé pour au moins un mot de S.

Si l'échantillon est suffisant, RPNI découvre le canonique.

RPNI [Oncina and García, 1992] : esquisse

Recherche en largeur d'abord pour trouver un état à fusionner avec un état déjà visité. Validation des fusions vis-à-vis des négatifs : si un exemple de S^- est reconnu, la fusion est rejetée.

- F : les nœuds fermés, F sont les états les plus proches de l'état initial, on a échoué à les faire disparaître par fusion, ils resteront dans l'automate final ;
- O : les nœuds ouverts, c'est-à-dire candidats à la fusion, les états de O suivent ceux de F, ils constituent une frontière qui sépare F des autres états ;
- $Q \setminus O \setminus F$ sont les états les plus profonds de l'automate.

On cherche à fusionner un état de F avec un état de O. Si un état de O ne peut être fusionné, il passe dans F et ses successeurs vont dans O.

RPNI [Oncina and García, 1992] : procédures

Il faut savoir :

- calculer le PTA d'un ensemble d'exemples ;
- fusionner des états ;
- maintenir le déterminisme ;
- tester vis-à-vis des négatifs.

Fusion de plusieurs états I

Algorithme Fusion(A, E)
Entrées : $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $E \subseteq Q, q_0 \notin E_{[2,\dots,|E|]}$
Sortie : A' l'automate résultat de la fusion des états de E dans A

$q_1 = E[1]$
$E = E_{[2,\dots,|E|]}$
$Q' = Q \setminus E$
if $E \cap F \neq \emptyset$ **then**
    $F' = F \setminus E \cup \{q_1\}$
else
    $F' = F$
end if
$\delta' = \emptyset$
for all $(q_a, l, q_b) \in \delta$ **do**
    if $q_a \in E$ **then**

Fusion de plusieurs états II

        $q'_a = q_1$
    else
        $q'_a = q_a$
    end if
    if $q_b \in E$ **then**
        $q'_b = q_1$
    else
        $q'_b = q_b$
    end if
    $\delta' = \delta' \cup \{(q'_a, l, q'_b)\}$
end for
return $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$

La fusion de deux états peut provoquer une perte de déterminisme au niveau de l'état résultat...

RPNI [Oncina and García, 1992] : fusion déterministe

On va propager la fusion jusqu'au retour du déterminisme.
Algorithme FusionD(A, E)
Entrées : $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $E \subseteq Q, q_0 \notin E_{[2,\dots,|E|]}$
Sortie : A' résultat de la fusion de q_1 et q_2 dans A et déterministe

$A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F') = \text{Fusion}(A, E)$
$q_1 = E[1]$
nondet = **true**
while nondet **do**
    if $\exists E' \subseteq Q, |E'| > 1, \exists l \in \Sigma, \forall q \in E' : (q_1, l, q) \in \delta'$ **then**

        $A' = \text{FusionD}(A', E')$
    else
        nondet = **false**
    end if
end while

RPNI [Oncina and García, 1992] : test de correction

Algorithme isCorrect(A, S^-)
Entrées : A un automate et S^- un échantillon de n mots négatifs
Sortie : **true** si A ne reconnaît aucun mot de S^-, **false** sinon

correct = **true**
$i = 0$
while correct **and** $i < n$ **do**
    if $A \succeq S^-[i]$ **then**
        correct = **false**
    else
        $i = i + 1$
    end if
end while
return correct

RPNI [Oncina and García, 1992] : algorithme I

Algorithme RPNI(S)
Entrées : S un échantillon de mots (positifs et négatifs)
Sortie : A un AFD consistant avec S

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = \text{PTA}(S^+)$
$F = [q_0]$
$O = [q \in Q | \exists l \in \Sigma : q \in \delta(q_0, l)]$
while $O \neq \emptyset$ **do**
    $q_O = O[1]$
    encore = **true**; $i = 0$
    while encore **and** $i < |F|$ **do**
        $q_F = F[i]$
        $A' = \text{FusionD}(A, \{q_F, q_O\})$
        if isCorrect(A', S^-) **then**
            $A = A'$

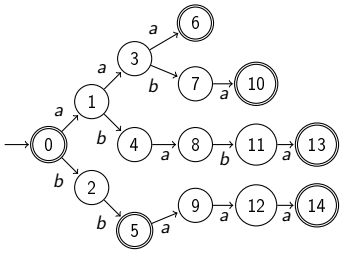
RPNI [Oncina and García, 1992] : algorithme II

            encore = **false**
        end if
        $i = i + 1$
    end while
    $O = O_{[2,\dots,|O|]}$
    if encore **then**
        $F = F \cup \{q_O\}$
        $O = \emptyset$
        for all $q_F \in F$ **do**
            $O = O \cup \{q \in Q \setminus F | \exists l \in \Sigma : q \in \delta(q_F, l)\}$
        end for
    end if
end while
return A

RPNI : calcul du PTA

$S = \{ (\epsilon, +), (bb, +), (aaa, +), (aaba, +), (ababa, +), (bbaaa, +), (aa, -), (ab, -), (ba, -), (aaaa, -)\}$

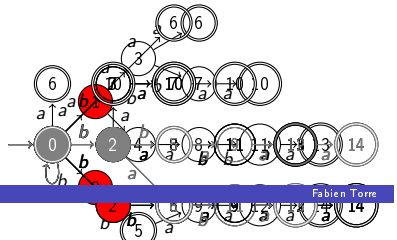
On calcule le PTA de $S^+ = \{\epsilon, bb, aaa, aaba, ababa, bbaaa\}$.



RPNI : première tentative de fusion

Tentative de fusion de 0 et 1.
Perte de déterminisme, fusion de 0 et 3. Perte de déterminisme, fusion de 0 et 6. Perte de déterminisme, fusion de 2, 4 et 7. Perte de déterminisme, fusion de 8 et 10. Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(aa, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(0, 1)$ sont rejetés.

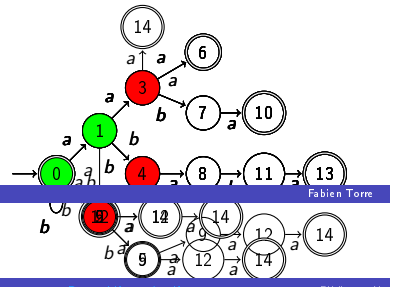
$F = \{0\}$
$O = \{1, 2\}$



RPNI : deuxième tentative de fusion

1 rejoint l'ensemble F, 3 et 4 vont dans O.
Tentative de fusion de 0 et 2.
Perte de déterminisme, fusion de 0 et 5. Perte de déterminisme, fusion de 1 et 9. Perte de déterminisme, fusion de 3 et 12. Perte de déterminisme, fusion de 6 et 14. Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
L'automate est correct et la fusion $(0, 2)$ est validée.

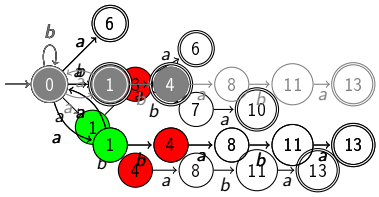
$F = \{0, 1\}$
$O = \{2, 3, 4\}$



RPNI : troisième tentative de fusion

Tentative de fusion de 0 et 3.
Perte de déterminisme, fusion de 0 et 7. Perte de déterminisme, fusion de 1, 6 et 10. Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(aa, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(0, 3)$ sont rejetés.

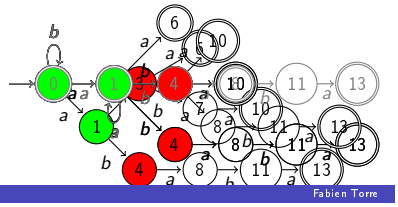
$F = \{0, 1\}$
$O = \{3, 4\}$



RPNI : quatrième tentative de fusion

Tentative de fusion de 1 et 3.
Perte de déterminisme, fusion de 1 et 6. Perte de déterminisme, fusion de 4 et 7. Perte de déterminisme, fusion de 8 et 10.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(aa, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(1, 3)$ sont rejetés.

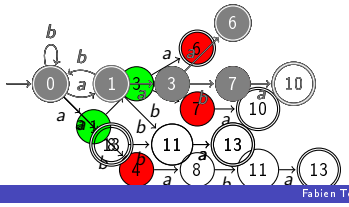
$F = \{0, 1\}$
$O = \{3, 4\}$



RPNI : cinquième tentative de fusion

3 rejoint l'ensemble F, 6 et 7 vont dans O.
Tentative de fusion de 0 et 4.
Perte de déterminisme, fusion de 1 et 8. Perte de déterminisme, fusion de 0 et 11. Perte de déterminisme, fusion de 1 et 13.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(ab, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(0, 4)$ sont rejetés.

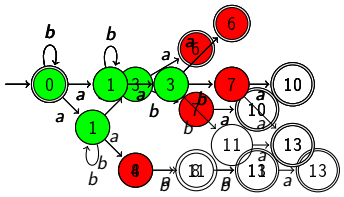
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{4, 6, 7\}$



RPNI : sixième tentative de fusion

Tentative de fusion de 1 et 4.
Perte de déterminisme, fusion de 3 et 8. Perte de déterminisme, fusion de 7 et 11. Perte de déterminisme, fusion de 10 et 13.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
L'automate est correct et la fusion $(1, 4)$ est validée.

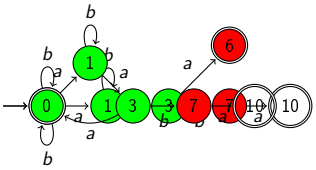
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{4, 6, 7\}$



RPNI : septième tentative de fusion

Tentative de fusion de 0 et 6.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
L'automate est correct et la fusion $(0, 6)$ est validée.

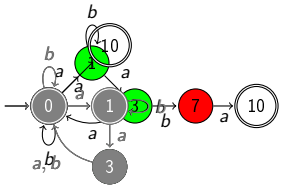
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{6, 7\}$



RPNI : huitième tentative de fusion

Tentative de fusion de 0 et 7.
Perte de déterminisme, fusion de 1 et 10.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(ab, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(0, 7)$ sont rejetés.

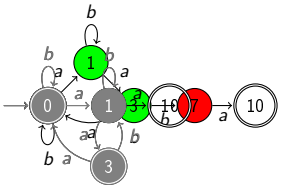
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{7\}$



RPNI : neuvième tentative de fusion

Tentative de fusion de 1 et 7.
Perte de déterminisme, fusion de 3 et 10.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
$(aa, -)$ est reconnu, l'automate et la fusion $(1, 7)$ sont rejetés.

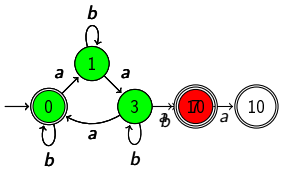
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{7\}$



RPNI : dixième tentative de fusion

Tentative de fusion de 3 et 7.
Perte de déterminisme, fusion de 0 et 10.
Automate déterministe.
Vérification de la correction vis-à-vis de $S^- = \{aa, ab, ba, aaaa\}$.
L'automate est correct et la fusion $(3, 7)$ est validée.

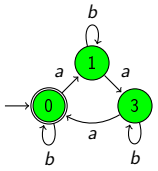
$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{7\}$



RPNI : fin

$S = \{ (\epsilon, +), (bb, +), (aaa, +), (aaba, +), (ababa, +), (bbaaa, +), (aa, -), (ab, -), (ba, -), (aaaa, -)\}$

$F = \{0, 1, 3\}$
$O = \{\}$



Algorithmes et candidats MG

Algorithmes génériques à base de MG

- DLG et GloBo ;
- BaggingMG, AdaBoostMG, GloBoost ;
- résistance au bruit.

Candidats MG dans les mots

- algorithme k-TSSI ;
- algorithme ZR ;
- apprentissage de boules de mots ?

Retour sur MGC

Algorithme MGC(E, N)
Entrées : $E = [e_1, \ldots, e_n] \subseteq \mathcal{X}$ une séquence de n exemples de même classe, N un ensemble de contre exemples.
Sortie : $h \in \mathcal{H}$ une généralisation de E, maximalement correcte par rapport à E et N.

1: $h = e_1$
2: **for** $i = 2$ to n **do**
3: $\quad h' = \texttt{MG}(h, e_i)$ {Généralisation entre deux hypothèses.}
4: $\quad$ **if** $(\forall e \in N : h' \not\geq e)$ **then**
5: $\quad\quad h = h'$ {h' (correcte) devient la généralisation courante.}
6: $\quad$ **end if**
7: **end for**
8: **return** h

Que sont les combinaisons ?

Quelques questions...

- la combinaison de deux k-TSS est elle un k-TSS ?
- oui ? quel est alors l'intérêt de combiner ?
- la combinaison de deux 0-réversibles est elle un 0-réversible ?
- non ? dans quelle classe sommes-nous ? peut-on atteindre tous les langages réguliers ?
- est-ce que les poids jouent un rôle dans l'expressivité de la combinaison ?

Et à propos... quelles sont les VC-dim des classes étudiées ?

k-TSSI : forme moindre généralisée I

Algorithme MG-k-TSSI(h, w)

Entrées : $h = (Q, \Sigma, q_0, F)$ un automate k-TSS et w un mot
Sortie : h' un k-TSS généralisation minimale de h couvrant w

1: $q = q_0$
2: **for** $i = 1$ to $|w|$ **do**
3: $\quad v = q.w_i$
4: $\quad$ **if** $(|v| > k - 1)$ **then**
5: $\quad\quad v = v_{2,\ldots,|v|}$
6: $\quad$ **end if**
7: $\quad nq = v$
8: $\quad$ ajouter nq à Q
9: $\quad$ ajouter (q, w_i, nq) à δ
10: $\quad$ **if** $(i = |w|)$ **then**

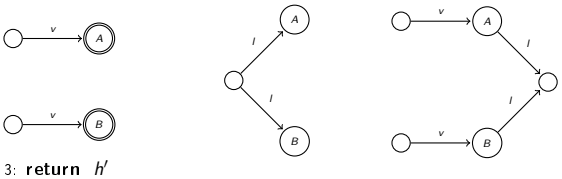
k-TSSI : forme moindre généralisée II

11: $\quad\quad$ ajouter nq à F
12: $\quad$ **end if**
13: $\quad q = nq$
14: **end for**
15: **return** $h' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

ZR : forme moindre généralisée

Algorithme MG-k-R(h, w)
Entrées : h un automate k-réversible et w un mot
Sortie : h' un k-réversible généralisation minimale de h couvrant w

1: $h' = \text{ajoutBranche}(w, h)$
2: appliquer les fusions des états A et B dans les situations suivantes ($l \in \Sigma$ et $|v| = k$) :



3: **return** h'

Boules de mots [Tantini, 2009] et moindres généralisés

ajout de e à $B_r(c)$

- Soit d la distance entre le c et e ;
- soit $r' = \frac{r+d}{2}$ le nouveau rayon ;
- le nouveau centre c' est sur le segment $[c; e]$, à une distance de e qui vaut r'.

ajout de *chiens* à $B_3(niche)$

- $d = \text{distance}(niche, chiens) = 5$;
- nouveau rayon : $r' = \frac{3+5}{2} = 4$;
- chemin d'édition : *niche; iche; che; ches; chens; chiens*;
- nouvelle hypothèse : $B_4(iche)$.

Premières expérimentations

- Uniquement sur `tic-tac-toe` [Blake and Merz, 1998] ;
- validations croisées 10 fois ;
- méthodes stochastiques exécutées 10 fois ;
- utilisation de volata pour les combinaisons d'automates ;
- RPNI apprend sur chaque classe ;
- repères :

majoritaire	65.34
C4.5	85.60
RPNI+	90.81
RPNI−	91.13

Combinaisons d'automates k-TSS

Combinaisons de taille 100.

k-TSSI	$k = 4$	$k = 5$	$k \in [3; 5]$	$k \in [3; 5]$ + Laplace
DLG	76.72	71.43	73.27	75.29
GloBo	82.78	74.69	80.47	82.36
AdaBoostMG	88.51	87.62	88.73	90.03
GloBoost	87.97	87.47	90.08	89.94

Combinaisons d'automates 0-réversibles

Combinaisons de taille 20.

k-réversibles	$k = 0$	$k = 0$ + Laplace
DLG	81.83	83.77
GloBo	85.05	87.41
AdaBoostMG	97.08	96.87
GloBoost	96.45	95.41

Variations sur la taille de l'échantillon

Proportion en apprentissage	10%	25%	50%	90%
RPNI+	66.52	74.91	80.17	90.81
RPNI−	66.89	74.15	78.60	91.13
AdaBoostMG	75.64	93.37	96.08	96.87
GloBoost	72.44	93.31	96.12	95.41

Et avec du bruit de classe

Avec 50% des données seulement.

Taux de bruit	0%	1%	5%	10%	15%
RPNI+	80.17	81.21	68.89	59.71	54.91
RPNI−	78.60	76.93	66.91	62.11	57.10
AdaBoostMG + Laplace	96.08	94.57	86.37	80.95	74.08
GloBoost	96.34	94.23	87.07	77.42	69.75
GloBoost + Laplace	96.12	94.14	88.59	79.14	69.04

Bilan de la combinaison d'automates

Au moins sur le problème *tic-tac-toe* :

- les algorithmes d'apprentissage par positifs seuls k-TSSI et ZR sont utilisables dans nos méthodes génériques ;
- et permettent d'obtenir des performances raisonnables ;
- certaines de nos méthodes rivalisent avec RPNI et le battent ;
- nos méthodes nécessitent moins d'exemples que RPNI ;
- nous résistons également mieux au bruit de classe.

Plus de résultats dans [Torre and Terlutte, 2009].
Poursuite de ce travail, intégration des boules de mots dans volata avec Frédéric Tantini et Alain Terlutte.

Bibliographie I

Angluin, D. (1982).
Inference of reversible languages.
Journal of the ACM, 29(3) :741–765.

Bex, G. J., Neven, F., Schwentick, T., and Tuyls, K. (2006).
Inference of concise dtds from xml data.
In *VLDB '06 : Proceedings of the 32nd international conference on Very large data bases*, pages 115–126. VLDB Endowment.

Blake, C. and Merz, C. (1998).
UCI repository of machine learning databases
[http ://archive.ics.uci.edu/ml/].

Bibliographie II

- Clark, A., Florêncio, C. C., and Watkins, C. (2006).
  Languages as hyperplanes : Grammatical inference with string kernels.
  In Fürnkranz, J., Scheffer, T., and Spiliopoulou, M., editors, *ECML 2006, 17th European Conference on Machine Learning*, volume 4212 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 90–101. Springer.
- Dupont, P. and Miclet, L. (1998).
  Inférence grammaticale régulière : fondements théoriques et principaux algorithmes.
  Technical Report RR-3449, INRIA.

Bibliographie III

- Fernau, H. (2005).
  Algorithms for learning regular expressions.
  In Jain, S., Simon, H.-U., and Tomita, E., editors, *Algorithmic Learning Theory, 16th International Conference, ALT 2005, Singapore, October 8-11, 2005, Proceedings*, volume 3734 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 297–311. Springer.
- García, P. and Vidal, E. (1990).
  Inference of k-testable languages in the strict sense and application to syntactic pattern recognition.
  IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 12(9) :920–925.
- Gold, E. M. (1967).
  Language identification in the limit.
  Information and Control, 10(5) :447–474.

Bibliographie IV

- Oncina, J. and García, P. (1992).
  Identifying regular languages in polynomial time, pages 99–108.

  World Scientific Publishing.
- Tantini, F. (2009).
  Inférence grammaticale en situations bruitées.
  PhD thesis, Université Jean Monnet de Saint-Étienne.
- Torre, F. and Terlutte, A. (2009).
  Méthodes d'ensemble en inférence grammaticale : une approche à base de moindres généralisés.
  In Bennani, Y. and Rouveirol, C., editors, *11ème Conférence francophone sur l'Apprentissage automatique (CAp'2009)*, pages 33–48, Hammamet (Tunisie). PUG.

Bibliographie V

- Valiant, L. G. (1984).
  A theory of the learnable.
  Communications of the ACM, 27 :1134–1142.