

Modèle d'apprentissage PAC

Fabien Torre

Université de Lille

Mercredi 7 et 14 octobre 2009

Notations et oracle

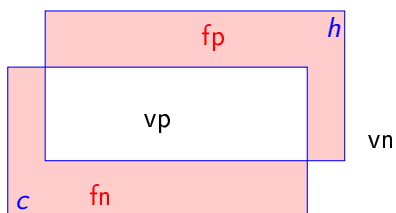
- \mathcal{X} l'espace des exemples et $\mathcal{Y} = \{+1, -1\}$ leurs classes;
- $x \in \mathcal{X}$ un exemple particulier;
- \mathcal{H} une classe de concepts définis sur \mathcal{X} ;
- $c \in \mathcal{H}$ un concept particulier :
 - vue ensembliste : $c \subseteq \mathcal{X}$;
 - vue fonctionnelle : $c : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$;
- \mathcal{D} une distribution sur \mathcal{X} ;
- erreur d'une hypothèse $h \in \mathcal{H}$ visant un concept $c \in \mathcal{H}$:

$$\text{erreur}(h) = \Pr_{x \in \mathcal{D}} [c(x) \neq h(x)]$$

- $EX(c, \mathcal{D})$ un oracle qui tire un exemple de \mathcal{X} suivant \mathcal{D} et le fournit avec sa classification par le concept cible : $\langle x, c(x) \rangle$.

Notations : exemples

- \mathcal{X} : les points de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{Y} = \{+1, -1\}$;
- $x = (70, 175)$;
- \mathcal{H} : les rectangles de \mathbb{R}^2 parallèles aux axes;
- c un rectangle particulier :
 - vue ensembliste : les points contenus dans le rectangle c ;
 - vue fonctionnelle : test d'appartenance au rectangle c ;
- \mathcal{D} : distribution poids/taille chez l'homme;
- erreur d'une hypothèse :



Définition de la PAC-apprenabilité

PAC apprenabilité [Valiant, 1984]

Définition : apprenabilité forte
 \mathcal{H} est PAC-apprenable s'il existe un algorithme L tel que :

- pour tout concept $c \in \mathcal{H}$,
- pour toute distribution \mathcal{D} sur \mathcal{X} ,
- pour tout paramètre d'erreur $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$,
- pour tout paramètre de confiance $0 < \delta < \frac{1}{2}$,

L fournit une hypothèse $h \in \mathcal{H}$ qui vérifie, avec une probabilité $1 - \delta$: $\text{erreur}(h) \leq \epsilon$.

Efficacement PAC-apprenable : L doit être polynomial en $\frac{1}{\epsilon}$ et $\frac{1}{\delta}$.

Définition de la PAC-apprenabilité

PAC apprenabilité : commentaires et précisions

- L a accès à l'oracle $EX(c, \mathcal{D})$;
- L doit fonctionner quelle que soit la distribution ;
- L perçoit cette distribution à travers l'oracle ;
- \mathcal{D} intervient aussi dans le calcul de l'erreur ;
- ϵ et δ sont fournis à L ;
- on peut choisir ϵ et δ aussi petits que voulus.

PAC-apprenabilité des rectangles

Retour aux rectangles...

- \mathcal{X} : les points de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{Y} = \{+1, -1\}$;
- \mathcal{H} : les rectangles de \mathbb{R}^2 parallèles aux axes.

Est-ce que \mathcal{H} est PAC-apprenable ?

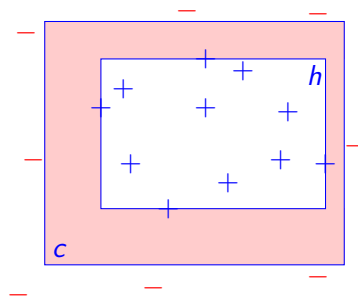
Proposition pour L

- 1 demander n exemples à l'oracle et constituer un échantillon d'apprentissage A ;
- 2 retourner h le rectangle moindre-généralisé des exemples positifs de A .

- Montrer que $\forall c, \mathcal{D}, \epsilon, \delta$ et pour n bien choisi h vérifie avec une probabilité $1 - \delta$: $\text{erreur}(h) \leq \epsilon$;
- montrer que n est un polynôme de $\frac{1}{\epsilon}$ et de $\frac{1}{\delta}$;
- intuition : plus ϵ et δ sont petits, plus n sera grand.

PAC-apprenabilité des rectangles

Démonstration (1) : c et h

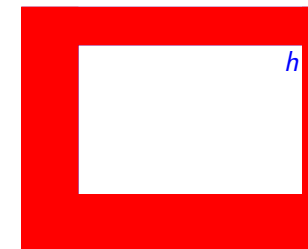


Remarques

- h est toujours inclus dans c , car h moindre-généralisé ;
- h présente donc uniquement une erreur de type fn .

PAC-apprenabilité des rectangles

Démonstration (2) : borner l'erreur

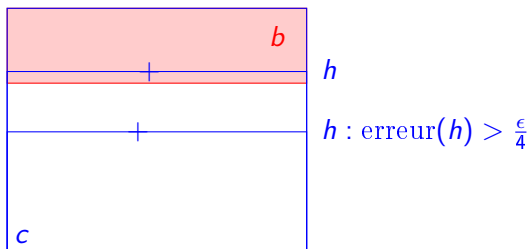


Objectifs

- limiter l'erreur globale à ϵ ;
- calculer la probabilité que l'une des bandes excède $\frac{\epsilon}{4}$.

Démonstration (3) : une bande

On définit une bande b de poids $\frac{\epsilon}{4}$ en haut de c .



Cas favorable : l'échantillon A contient un exemple (positif) dans b .
 L'erreur de h est inférieure à $\frac{\epsilon}{4}$ sur la bande haute.
 Cas défavorable : $A \cap b = \emptyset$. L'erreur de h est supérieure à $\frac{\epsilon}{4}$ sur la bande haute. Probabilité de cette situation ?

Démonstration (4) : probabilités

- Tirer un exemple dans $b : \frac{\epsilon}{4}$;
- tirer un exemple en dehors de $b : 1 - \frac{\epsilon}{4}$;
- tirer n exemples en dehors de $b : (1 - \frac{\epsilon}{4})^n$;
- ne pas avoir d'exemple dans l'une des bandes : $\leq 4 \times (1 - \frac{\epsilon}{4})^n$.

et on obtient finalement :

$$\Pr[\text{erreur}(h) > \epsilon] \leq 4 \times \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)^n \leq 4 \times \left(e^{-\frac{\epsilon}{4}}\right)^n = 4 \times e^{-\frac{n\epsilon}{4}}$$

en utilisant le fait que : $(1 - x) \leq e^{-x}$.

Démonstration (5) : calcul du n minimal

On veut $\Pr[\text{erreur}(h) > \epsilon] \leq \delta$ et on résout donc :

$$\begin{aligned} 4 \times e^{-\frac{n\epsilon}{4}} &\leq \delta \\ \Rightarrow e^{-\frac{n\epsilon}{4}} &\leq \frac{\delta}{4} \\ \Rightarrow -\frac{n\epsilon}{4} &\leq \ln\left(\frac{\delta}{4}\right) \\ \Rightarrow -n &\leq \frac{4}{\epsilon} \times \ln\left(\frac{\delta}{4}\right) \\ \Rightarrow n &\geq -\frac{4}{\epsilon} \times \ln\left(\frac{\delta}{4}\right) \\ \Rightarrow n &\geq \frac{4}{\epsilon} \times \ln\left(\frac{4}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Démonstration (6) : conclusions

- L doit constituer son échantillon avec $n = \frac{4}{\epsilon} \times \ln\left(\frac{4}{\delta}\right)$;
- cela garantit : $\Pr[\text{erreur}(h) \leq \epsilon] \geq 1 - \delta$;
- L est linéaire en $\frac{1}{\epsilon}$;
- L est logarithmique en $\frac{1}{\delta}$.

La classe des rectangles parallèles aux axes dans \mathbb{R}^2 est efficacement PAC-apprenable.
 (VC dimension de cette classe ?)

En exercices... Vecteurs booléens

Les exemples

- $\mathcal{X}_m = \{0, 1\}^m$;
- $x \in \mathcal{X}_m$: vecteur booléen de taille m , $x = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Hypothèses 1

- \mathcal{H}_m , conjonctions de littéraux;
- $h \in \mathcal{H}_m$, conjonction de variables niées ou pas, par exemple $h = a_1 \wedge \bar{a}_2$;
- \mathcal{H}_m est-il PAC apprenable ?

Hypothèses 2

- \mathcal{H}_m , 3-Term DNF;
- $h \in \mathcal{H}_m$, disjonction de trois conjonctions de littéraux, par exemple $h = (a_1 \wedge \bar{a}_2) \vee (\bar{a}_3 \wedge \bar{a}_4) \vee (a_1 \wedge a_3)$;

En exercices... PAC apprenabilité et compromis biais/variance

- Dans le modèle PAC, $c \in \mathcal{H}$, donc pas d'erreur de biais;
- si \mathcal{H} est trop riche, on a par contre une erreur importante en variance, et alors \mathcal{H} peut ne pas être PAC apprenable.

Apprenabilité faible [Kearns and Valiant, 1989]

Définition : apprenabilité faible

\mathcal{H} est PAC-apprenable s'il existe un algorithme L tel que :

- il existe $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ et $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}$,
- et pour tout concept $c \in \mathcal{H}$,
- et pour toute distribution \mathcal{D} sur \mathcal{X} ,

L fournit une hypothèse $h \in \mathcal{H}$ qui vérifie, avec une probabilité $1 - \delta_0$: $\text{erreur}(h) \leq \epsilon_0$.

On demande simplement que les hypothèses h produites par L soient meilleures qu'un étiquetage purement aléatoire.

Apprenabilité faible De l'apprenabilité faible à l'apprenabilité forte

On demande simplement que les hypothèses h produites par L soient meilleures qu'un étiquetage purement aléatoire.

- pour un problème à deux classes, quelle que soit la distribution, un étiquetage aléatoire a une erreur d'exactement $\frac{1}{2}$;
- les deux notions d'apprenabilité sont elles équivalentes?
- on dit que L est un *apprenant faible* si $\forall c \in \mathcal{H}, \forall \mathcal{D}$: $\text{erreur}(h) < \frac{1}{2}$ (avec une probabilité $1 - \delta_0$);
- peut-on transformer un apprenant faible L en un apprenant fort? c'est-à-dire trouver L' qui soit un apprenant fort en faisant un nombre d'appels polynomial à L ...

Comment booster (efficacement) ϵ_0 et δ_0 jusqu'à des valeurs arbitrairement petites?

Algorithme de boosting de la confiance

Objectif : obtenir une confiance δ et une erreur $\epsilon_0 + \gamma$ avec δ et γ positifs non nuls mais arbitrairement petits.

Proposition pour L'

- 1 utiliser k fois l'algorithme faible L pour obtenir autant d'hypothèses faibles h_1, h_2, \dots, h_k ;
- 2 demander m exemples à l'oracle pour former un échantillon A' ;
- 3 fournir $h = \text{ArgMin}_{h_i \in [h_1, h_2, \dots, h_k]}(\text{erreur}_{A'}(h_i))$.

Les risques d'échec encourus :

- que les k hypothèses produites aient chacune une erreur supérieure à ϵ_0 ; limiter ce risque à $\frac{\delta}{2}$
- que l'hypothèse choisie à la dernière étape ait en fait une erreur réelle supérieure à $\epsilon_0 + \gamma$. limiter ce risque à $\frac{\delta}{2}$

Reste à choisir k et m en conséquence...

Choix de k , le nombre d'hypothèses produites

Objectif : déterminer la valeur de k telle que la probabilité que chacune des hypothèses h_i ait une erreur supérieure à ϵ_0 soit inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

- Probabilité qu'une h_i ait une erreur supérieure à ϵ_0 : δ_0 ;
- probabilité que toutes les hypothèses h_i aient des erreurs supérieures à ϵ_0 : $\delta_0^k \leq (1 - \delta_0)^k \leq e^{-k\delta_0}$;

On veut que la probabilité d'un tel événement soit inférieure à $\frac{\delta}{2}$:

$$\begin{aligned} e^{-k\delta_0} &\leq \frac{\delta}{2} \\ \Rightarrow -k\delta_0 &\leq \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \Rightarrow -k &\leq \frac{1}{\delta_0} \times \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \Rightarrow k &\geq -\frac{1}{\delta_0} \times \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \Rightarrow k &\geq \frac{1}{\delta_0} \times \ln\left(\frac{2}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Choix de m , le nombre d'exemples pour choisir h

Objectif : déterminer la valeur de m telle que la probabilité que certaines erreurs de h_i mesurées sur A' dévient de plus de γ par rapport aux erreurs réelles, soit inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

Borne de Chernoff pour une hypothèse h :

$$\Pr(|\text{erreur}(h) - \text{erreur}_{A'}(h)| \geq \gamma) \leq e^{-2m\gamma^2}$$

Pour une hypothèse, on veut borner cette probabilité par $\frac{\delta}{2k}$:

$$\begin{aligned} e^{-2m\gamma^2} &\leq \frac{\delta}{2k} \\ \Rightarrow -2m\gamma^2 &\leq \ln\left(\frac{\delta}{2k}\right) \\ \Rightarrow -m &\leq \frac{1}{2\gamma^2} \cdot \ln\left(\frac{\delta}{2k}\right) \\ \Rightarrow m &\geq \frac{1}{2\gamma^2} \cdot \ln\left(\frac{2k}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Boosting de la confiance : bilan

La confiance peut-être boostée à volonté, avec un léger surcoût sur l'erreur.

(δ_0, ϵ_0) dépendant de L , (δ, γ) étant donnés :

- 1 utiliser $k = \frac{1}{\delta_0} \times \ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$ fois l'algorithme faible L pour obtenir autant d'hypothèses faibles h_1, h_2, \dots, h_k ;
- 2 demander $m = \frac{1}{2\gamma^2} \cdot \ln\left(\frac{2k}{\delta}\right)$ exemples à l'oracle pour former un échantillon A' ;
- 3 fournir $h = \text{ArgMin}_{h_i \in [h_1, h_2, \dots, h_k]}(\text{erreur}_{A'}(h_i))$.

Booster l'erreur est un peu plus difficile...

Booster | erreur

Algorithme de boosting de l'erreur

- 1 $h_1 = L(\text{EX}(c, \mathcal{D}))$;
- 2 définir un nouvel oracle $\text{EX}(c, \mathcal{D}_2)$ comme suit :
 - 1 on tire une pièce à pile ou face ;
 - 2 si *pile*, faire $x = \text{EX}(c, \mathcal{D})$ jusqu'à $h_1(x) = c(x)$;
 - 3 si *face*, faire $x = \text{EX}(c, \mathcal{D})$ jusqu'à $h_1(x) \neq c(x)$;
 - 4 renvoyer x .
- 3 $h_2 = L(\text{EX}(c, \mathcal{D}_2))$;
- 4 définir un nouvel oracle $\text{EX}(c, \mathcal{D}_3)$ comme suit :
 - 1 faire $x = \text{EX}(c, \mathcal{D})$ jusqu'à $h_1(x) \neq h_2(x)$;
 - 2 renvoyer x .
- 5 $h_3 = L(\text{EX}(c, \mathcal{D}_3))$;
- 6 renvoyer $h = \text{VoteMajoritaire}(h_1, h_2, h_3)$.

Booster | erreur

Commentaires, objectif, notations

- \mathcal{D}_2 donne un poids global de 0.5 aux exemples bien classés par h_1 et 0.5 aux mal classés ;
- il s'en suit que h_1 a une erreur de 0.5 sur \mathcal{D}_2 et que L , apprenant faible, ne peut pas apprendre h_1 sur \mathcal{D}_2 ;
- par construction, chaque h_i amène une information différente.

On doit montrer que l'hypothèse h fournie par L' vérifie :

$$\text{erreur}(h) < \epsilon_0$$

c'est-à-dire que L' fait strictement mieux que L .

Soient $\beta_1 = \text{erreur}_{\mathcal{D}}(h_1)$, $\beta_2 = \text{erreur}_{\mathcal{D}_2}(h_2)$ et $\beta_3 = \text{erreur}_{\mathcal{D}_3}(h_3)$.

Booster | erreur

D'une distribution à l'autre (1) : formules de passage

Considérons les exemples mal classés par h_1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathcal{D}_2 \\ \beta_1 & \rightarrow & \frac{1}{2} \\ \mathcal{D}[x] = 2 \cdot \beta_1 \cdot \mathcal{D}_2[x] & \rightarrow & \mathcal{D}_2[x] = \frac{1}{2 \cdot \beta_1} \cdot \mathcal{D}[x] \end{array}$$

... et les exemples bien classés par h_1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathcal{D}_2 \\ 1 - \beta_1 & \rightarrow & \frac{1}{2} \\ \mathcal{D}[x] = 2 \cdot (1 - \beta_1) \cdot \mathcal{D}_2[x] & \rightarrow & \mathcal{D}_2[x] = \frac{1}{2 \cdot (1 - \beta_1)} \cdot \mathcal{D}[x] \end{array}$$

Booster | erreur

D'une distribution à l'autre (2) : sur un exemple

Cinq exemples, distribution uniforme

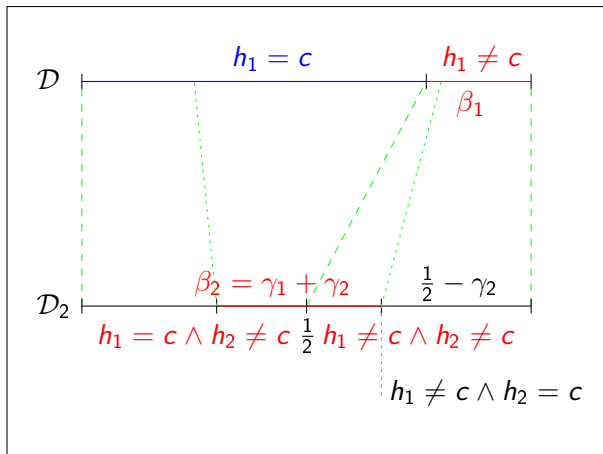
$$\mathcal{D} : \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}$$

- trois sont bien classés par h_1 , deux en erreur : $\beta_1 = \frac{2}{5}$;
- facteur multiplicateur des mal classés : $\frac{1}{2 \cdot \beta_1} = \frac{5}{4}$;
- facteur multiplicateur des bien classés : $\frac{1}{2 \cdot (1 - \beta_1)} = \frac{5}{6}$;

$$\mathcal{D}_2 : \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$\underbrace{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{2}} \quad \underbrace{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}$

D'une distribution à l'autre (3) : notations complètes



Décomposition de l'erreur

Si h finale se trompe c'est que l'un des deux cas est survenu :

- ① h_1 et h_2 sont d'accord mais se trompent ;
- ② h_1 et h_2 ne sont pas d'accord et h_3 se trompe.

ce qui se traduit formellement par :

$$\text{erreur}_{\mathcal{D}}(h) = \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] + \Pr_{\mathcal{D}}[h_3(x) \neq c(x) | h_1(x) \neq h_2(x)] \cdot \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq h_2(x)]$$

On va développer explicitement, en vue de comparer à ϵ_0 .

Décomposition de l'erreur : cas 1

h_1 et h_2 sont d'accord mais se trompent.

Par définition :

$$\Pr_{\mathcal{D}_2}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] = \gamma_2$$

et par application de la formule de passage de \mathcal{D}_2 vers \mathcal{D} :

$$\Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] = 2 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_2$$

Décomposition de l'erreur : cas 2

h_1 et h_2 ne sont pas d'accord et h_3 se trompe.

Par définition de \mathcal{D}_3 :

$$\Pr_{\mathcal{D}}[h_3(x) \neq c(x) | h_1(x) \neq h_2(x)] = \Pr_{\mathcal{D}_3}[h_3(x) \neq c(x)] = \beta_3$$

On décompose la situation où h_1 et h_2 diffèrent :

$$\Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq h_2(x)] = \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) = c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] + \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) = c(x)]$$

Décomposition de l'erreur : cas 2.1 et cas 2.2

$$\begin{aligned} \Pr_{\mathcal{D}_2}[h_1(x) = c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] &= \gamma_1 \\ \Rightarrow \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) = c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] &= 2 \cdot (1 - \beta_1) \cdot \gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr_{\mathcal{D}_2}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) = c(x)] &= \frac{1}{2} - \gamma_2 \\ \Rightarrow \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) = c(x)] &= 2 \cdot \beta_1 \cdot (\frac{1}{2} - \gamma_2) \end{aligned}$$

Calcul exact de l'erreur

$$\begin{aligned} \text{erreur}_{\mathcal{D}}(h) &= \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq c(x) \wedge h_2(x) \neq c(x)] \\ &+ \Pr_{\mathcal{D}}[h_3(x) \neq c(x) | h_1(x) \neq h_2(x)] \cdot \Pr_{\mathcal{D}}[h_1(x) \neq h_2(x)] \\ &= 2 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_2 + \beta_3 \cdot [2 \cdot (1 - \beta_1) \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \beta_1 \cdot (\frac{1}{2} - \gamma_2)] \\ &= 2 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_2 + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 - 2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 + \beta_1 \cdot \beta_3 - 2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_2 \\ &= \beta_1 \cdot (2 \cdot \gamma_2 - 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 + \beta_3 - 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_2) + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 \\ &= \beta_1 \cdot [2 \cdot \gamma_2 + \beta_3 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2)] + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 \end{aligned}$$

Borne sur l'erreur

$$\begin{aligned} \text{erreur}_{\mathcal{D}}(h) &= \beta_1 \cdot [2 \cdot \gamma_2 + \beta_3 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2)] + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 \\ &\leq \epsilon_0 \cdot [2 \cdot \gamma_2 + \beta_3 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2)] + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 \\ &\leq 2 \cdot \gamma_2 \cdot \epsilon_0 + \beta_3 \cdot \epsilon_0 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2) + 2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_1 \\ &\leq \beta_3 \cdot [\epsilon_0 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2) + 2 \cdot \gamma_1] + 2 \cdot \gamma_2 \cdot \epsilon_0 \\ &\leq \epsilon_0 [\epsilon_0 \cdot (1 - 2 \cdot \beta_2) + 2 \cdot \gamma_1] + 2 \cdot \epsilon_0 \cdot \gamma_2 \\ &\leq \epsilon_0^2 - 2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot \beta_2 + 2 \cdot \epsilon_0 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) \\ &\leq \epsilon_0^2 - 2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot \beta_2 + 2 \cdot \epsilon_0 \cdot \beta_2 \\ &\leq \epsilon_0^2 + 2 \cdot \beta_2 \cdot (\epsilon_0 - \epsilon_0^2) \\ &\leq \epsilon_0^2 + 2 \cdot \epsilon_0 \cdot (\epsilon_0 - \epsilon_0^2) \\ &\leq 3 \cdot \epsilon_0^2 - 2 \cdot \epsilon_0^3 < \epsilon_0 \end{aligned}$$

L' booste effectivement l'erreur de *L*!

Premier algorithme de boosting [Schapire, 1990]

On note $g(\epsilon) = 3 \cdot \epsilon^2 - 2 \cdot \epsilon^3$.

ApprentissageFort($\epsilon, EX(c, \mathcal{D})$) :

- 1 si $\epsilon \geq \epsilon_0$, retourner $L(EX(c, \mathcal{D}))$;
- 2 $\epsilon' = g^{-1}(\epsilon)$;
- 3 $h_1 = \text{ApprentissageFort}(\epsilon', EX(c, \mathcal{D}))$;
- 4 définir \mathcal{D}_2 en fonction de \mathcal{D} et de h_1 , comme précédemment ;
- 5 $h_2 = \text{ApprentissageFort}(\epsilon', EX(c, \mathcal{D}_2))$;
- 6 définir \mathcal{D}_3 en fonction de \mathcal{D} , h_1 et h_2 , comme précédemment ;
- 7 $h_3 = \text{ApprentissageFort}(\epsilon', EX(c, \mathcal{D}_3))$;
- 8 retourner $h = \text{VoteMajoritaire}(h_1, h_2, h_3)$.

